Lösungen zu Serie 3

Ebenen, lineare Gleichungssysteme, Eliminationsverfahren von Gauss

1. Betrachte die drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 im $\mathbb{R}^3$, die durch folgende Gleichungen definiert sind

$$x + y + z = 2 \tag{1}$$
$$2x - 4y + 6z = 5 \tag{2}$$
$$3x - 5y + 7z = 6 \tag{3}$$

(a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der drei Ebenen. Zeichnen Sie die drei Ebenen und deren Schnittpunkt (qualitativ) in ein Koordinatensystem.

Lösung:

Wir vereinfachen das Gleichungssystem durch Zeilenoperationen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & 5 \\ 3 & -5 & 7 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 - 3L_1 \to L_3]{L_2 - 2L_1 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{4}L_3 \to L_3]{-\frac{1}{2}L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{L_3 - \frac{2}{3}L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir $z = 1, y = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{1}{2}$, $x = 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, also das

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der einzige Schnittpunkt der drei Ebenen ist.

(b) Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Schnittgeraden von E_1 und E_3 und zeichnen Sie die Gerade in das Koordinatensystem ein.

Lösung:

Subtrahiert man $3 \cdot$ Gleichung (1) von Gleichung (3) erhält man $-8y + 4z = 0$. Dies ist äquivalent zu $-2y + z = 0$. Wir wählen $t \in \mathbb{R}$ als Parameter und setzen $z = t$. Dann ist $y = \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}t$ und (wegen Gleichung (1)) $x = 2 - y - z = 2 - \frac{3}{2}t$. Folglich ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Parametrisierung der Schnittgeraden $E_1 \cap E_3$.

(c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ schneidet die Gerade

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

die Ebene E_2?

Lösung:
Es sei $a \in \mathbb{R}$ und wir nehmen an, die Gerade und die Ebene E_2 haben mindestens einen gemeinsamen Punkt. Sei dieser Punkt (x, y, z). Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$2\lambda a + 6(1 + \lambda) = 5\,.$$

Also auch:

$$(2a + 6)\lambda = -1\,. \tag{4}$$

Falls $a = -3$ führt Gleichung (4) jedoch zum Widerspruch $0 = -1$. Andererseits, falls $a \neq -3$, ergibt Gleichung (4) ein eindeutiges $\lambda \in \mathbb{R}$ und mithin einen eindeutigen Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene E_2.

2. Sei $E \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ die Ebene durch die Punkte $(0, 0, 0), (1, 2, 1)$ und $(-1, 1, 4)$ und sei F die Ebene gegeben durch die Gleichung $x = y$. Bestimme die Schnittmenge $E \cap F$. (2)

Lösung:
Wir bestimmen zunächste eine lineare Gleichung $ax + by + cz = d$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, sodass E die Lösungsmenge dieser Gleichung ist. Dazu müssen wir folgendes Gleichungssystem lösen, welches wir durch Zeilenoperationen vereinfachen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 + L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 - 2L_3 \to L_1]{L_2 - 2L_3 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die letzte Gleichung impliziert $d = 0$. Wählen wir zum Beispiel $c = 3$, so gilt $b = -\frac{5}{3}c = -5$ und $a = b + 4c = 7$ und wir haben

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 7x - 5y + 3z = 0\right\}.$$

Die Schnittmenge $E \cap F$ ist nun gegeben als die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 7x - 5y + 3z &= 0 \\ x - y &= 0, \end{aligned}$$

also $\{t(-3, -3, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Die Lösungsmenge ist eine Gerade in $\mathbb{R}^3$. Um die parametrisierte Form zu berechnen, bringen wir dieses Gleichungssystem in Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - 7L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Die parametrisierte Form der Schnittgerade ist daher

$$E \cap F = \left\{ t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Sei E die Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

in parametrisierter Form. Finden Sie eine lineare Gleichung $ax + by + cz = d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, sodass E die Lösungsmenge dieser Gleichung ist. Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf, welches Sie mit Zeilenoperationen vereinfachen.

Lösung:
Ein Punkt (x, y, z) liegt in der Ebene E genau dann, wenn es $s, t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$s\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Wir vereinfachen dieses Gleichungssystem mit den zwei Variablen s, t durch Zeilenoperationen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & x-1 \\ 1 & 2 & y-2 \\ 1 & 1 & z-3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y-2 \\ 3 & 5 & x-1 \\ 1 & 1 & z-3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 - L_1 \to L_3]{L_2 - 3L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y-2 \\ 0 & -1 & x-3y+5 \\ 0 & -1 & -y+z-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y-2 \\ 0 & 1 & -x+3y-5 \\ 0 & -1 & -y+z-1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 + L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y-2 \\ 0 & 1 & -x+3y-5 \\ 0 & 0 & -x+2y+z-6 \end{array}\right)$$

Das zugehörige Gleichungssystem zu der letzten erweiterten Koeffizientenmatrix hat eine Lösung genau dann, wenn $-x + 2y + z - 6 = 0$ ist. Eine Lösung für dieses Gleichungssystem existiert aber genau dann, wenn es eine Lösung (s, t) für die Gleichung (5) gibt, also liegt ein Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in der Ebene E genau dann, wenn $-x + 2y + z - 6 = 0$ gilt. Somit ist

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 2y + z = 6 \right\}.$$

4. Geben Sie je ein Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit
   (a) 3 Gleichungen, 4 Unbekannten, keiner Lösung,
   Lösung:
   Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z - w &= 0 \\ x + y - z - w &= 2 \\ 2x + y - 3z + w &= 2 \end{aligned}$$

   hat keine Lösung.
   (b) 4 Gleichungen, 2 Unbekannten, genau einer Lösung.
   Lösung:
   Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \\ x - y &= -1 \\ 4x - 4y &= -4 \end{aligned}$$

   hat nur die Lösung $(x, y) = (0, 1)$.

5. Bestimmen Sie jeweils eine Parametrisierung der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems, welches durch die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b) gegeben ist.

(a)

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Lösung:
Es gibt $5-3=2$ freie Variablen. Wir wählen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ als Parameter und setzen $x_2 = \lambda_1, x_4 = \lambda_2$. Dann folgt $x_1 = 11 - 2\lambda_1 - 7\lambda_2, x_3 = \lambda_2, x_5 = -1$. Wir erhalten eine Parametrisierung

$$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \text{Lös}(A,b) \subset \mathbb{R}^5,$$

$$(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 - 2\lambda_1 - 7\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$(A,b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 \end{array}\right)$$

für einen Parameter $a \in \mathbb{R}$.

Lösung:
Für $a \neq 4$ existiert keine Lösung, es gilt dann $\text{Lös}(A,b) = \emptyset$. Wir bestimmen eine Parametrisierung der Lösungsmenge im Fall $a = 4$. Es gibt $6 - 3 = 3$ freie Variablen. Wir wählen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ als Parameter und setzen $x_3 = \lambda_1, x_4 = \lambda_2, x_6 = \lambda_3$. Dann gilt $x_1 = 1 - \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3$, $x_2 = -2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3$, $x_5 = -1 - 3\lambda_3$. Wir erhalten eine Parametrisierung

$$\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \text{Lös}(A,b) \subset \mathbb{R}^6,$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösung:
Es gibt $3-2=1$ freie Variable. Wir wählen $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ als Parameter und setzen $x_1 = \lambda_1$. Es gilt $x_3 = -\frac{2}{5}$ und $x_2 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3}x_2 = \frac{12}{5}$. Also ist ein Parametrisierung der Lösungsmenge gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathbb{R} &\to \text{Lös}(A,b) \subset \mathbb{R}^3, \\ \lambda_1 \mapsto x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{12}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. Sei $A = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$-Matrix mit reellen Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Sei $b \in \mathbb{R}^m$ und sei $y \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$. Zeigen Sie, dass (2)

$$\text{Lös}(A,b) = y + \text{Lös}(A,0) = \{v \mid v = y + z \text{ für ein } z \in \text{Lös}(A,0)\}$$

gilt. Man nennt $\text{Lös}(A,0)$ die Lösungsmenge des *homogenen Gleichungssystems* $A \cdot x = 0$ und y eine *spezielle Lösung* des Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

Lösung:
Wir zeigen die Gleichheit $\text{Lös}(A,b) = y + \text{Lös}(A,0)$, indem wir die beiden Inklusionen „ $\subseteq$ “ und „ $\supseteq$ “ zeigen.
„ $\subseteq$ “: Sei $v \in \text{Lös}(A,b)$. Dann gilt $A \cdot v = b$. Da y auch eine Lösung von $A \cdot x = b$ ist, gilt auch $A \cdot y = b$. Wir setzen $w := v - y$. Dann gilt $A \cdot w = A \cdot (v-y) = A \cdot v - A \cdot y = b - b = 0$, also ist w eine Lösung von $A \cdot x = 0$. Damit ist $w \in \text{Lös}(A,0)$ und $v = y + w \in y + \text{Lös}(A,0)$. Da $v \in \text{Lös}(A,b)$ beliebig gewählt war, folgt $\text{Lös}(A,b) \subseteq y + \text{Lös}(A,0)$.
„ $\supseteq$ “: Sei nun $v \in y + \text{Lös}(A,0)$. Es existiert als ein $z \in \text{Lös}(A,0)$, sodass $v = y + z$. Dann gilt $A \cdot v = A \cdot y + A \cdot z = b + 0 = b$, also $v \in \text{Lös}(A,b)$ und wir haben auch diese Inklusion gezeigt.
Es folgt die Behauptung.

7. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Matrix bzw. ein Vektor über $\mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $A \cdot x = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

Lösung:
Wir vereinfachen das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ durch Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 + \frac{2}{3}L_1 \to L_3]{L_2 - \frac{1}{3}L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}L_1 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es gibt $3-1=2$ freie Variablen. Wir wählen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ als Parameter und setzen $x_2 = \lambda_1, x_3 = \lambda_2$. Dann folgt $x_1 = -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2$. Also gilt

$$\text{Lös}(A,0) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $A \cdot x = b$ für $x \in \mathbb{R}^3$. Dies können Sie entweder mit dem Eliminationsverfahren von Gauss machen oder die Aussage aus Aufgabe 6 verwenden, indem Sie eine spezielle Lösung des Gleichungssystemms finden. Für das Finden solch einer speziellen Lösung haben Sie z.B. in der Übungsstunde eine Methode kennengelernt.

Lösung:
Der Vektor

$$y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems, d.h. $Ay = b$. Somit ist der Lösungsraum nach Aufgabe 6 gegeben durch

$$\text{Lös}(A, b) = y + \text{Lös}(A, 0)\,.$$

Alternativ kann man wie in (a) das lineare Gleichungssytem durch Zeilenoperationen vereinfachen. Dies wollen wir hier nicht weiter ausführen. Zur Übung können Sie überprüfen, dass man so auf diesselbe Lösungsmenge kommt.

8. Bestimme alle reellen Zahlentripel (a, b, c), für welche das Gleichungssystem (2)

$$\begin{aligned} ay + bz &= 0 \\ ax + cz &= 0 \\ bx + cy &= 0\,. \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung hat.

Lösung:

Hier ist nochmals das gegebene Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} & & ay & + & bz & = & 0 \\ ax & & & + & cz & = & 0 \\ bx & + & cy & & & = & 0. \end{array} \qquad (*)$$

Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

- Fall $a = 0$: $\exists$ nichttriviale Lösung, nämlich z. B.

$$(x, y, z) = \begin{cases} (-c, b, 0) & \text{falls } (b, c) \neq (0, 0), \\ (1, 0, 0) & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Fall $a \neq 0$: Wir erhalten das äquivalente System

$$\begin{array}{ccccccc} & & y & + & \frac{b}{a}z & = & 0 \\ x & & & + & \frac{c}{a}z & = & 0 \\ & & cy & - & \frac{bc}{a}z & = & 0 \end{array}$$

und weiter

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & \frac{c}{a}z & = & 0 \\ & & y & + & \frac{b}{a}z & = & 0 \\ & & & - & \frac{2bc}{a}z & = & 0. \end{array}$$

Nun haben wir also wieder zwei Fälle:
Fall $bc \neq 0$: Es gibt nur die triviale Lösung, denn durch Rückwärtssubstitution erhalten wir wegen $z = 0$ auch $x = y = 0$.
Fall $bc = 0$: $\exists$ nichttriviale Lösung, z. B. $(x, y, z) = (c, b, -a)$.

Wir haben also gesehen, dass das Gleichungssystem $(*)$ nur die triviale Lösung hat genau dann, wenn $a \neq 0$ und $bq \neq 0$ gilt. Dies ist der Fall genau dann, wenn $abc \neq 0$ ist. Darum erhalten wir

$$\left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (*) \text{ besitzt nur die triviale Lösung}\right\} = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; abc \neq 0\right\} = (\mathbb{R}\backslash\{0\})^3\,.$$

9. Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Gauss alle Matrizen $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft, dass die Summe über alle Elemente jeder Zeile, jeder Spalte und beider Diagonalen einen vorgegebenen Wert $c \in \mathbb{R}$ annimmt. Wie lautet insbesondere die Zahl a_{22}? Ergänzen Sie nun die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 16 & a_{13} \\ 24 & 30 & 36 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

so, dass sie den obigen Bedingungen genügt.

Lösung:

Wir suchen also eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33} = a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ = a_{31} + a_{32} + a_{33} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{13} + a_{22} + a_{31} = c. \end{aligned}$$

Das sind insgesamt acht Gleichungen für die neun Unbekannten $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$. Wir schreiben diese in Matrixform wie folgt:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

wobei wir die Matrix mit Eliminationsverfahren von Gauss auf Stufenform gebracht haben. (In der Prüfung müssen Sie auch Ihren Rechenweg angeben. Wir geben hier die einzelnen Zeilenoperationen nicht an, da dies zu einer sehr langen Lösung führen würde.) Wir sehen also, dass das Gleichungssystem lösbar ist. Wir berechnen die Lösungen nun durch Rückwärtssubstitution: Es gibt $9 - 7 = 2$ freie Parameter; wir setzen $a_{33} = \mu, a_{32} = \lambda$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_{31} &= -a_{32} - a_{33} + c = -\lambda - \mu + c \\ a_{23} &= a_{31} - a_{33} + \frac{1}{3}c = \frac{4}{3}c - 2\mu - \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= a_{23} - a_{31} + a_{33} = \frac{1}{3}c \\ a_{21} &= -a_{22} - a_{23} + c = -\frac{2}{3}c + \lambda + 2\mu \\ a_{13} &= -a_{23} - a_{33} + c = -\frac{1}{3}c + \lambda + \mu \\ a_{12} &= -a_{22} - a_{32} + c = \frac{2}{3}c - \lambda \\ a_{11} &= -a_{21} - a_{31} + c = \frac{2}{3}c - \mu \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$A = \frac{c}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen also insbesondere, dass $a_{22} = \frac{1}{3}c$ eindeutig durch c festgelegt ist.

Für das konkrete Beispiel ist $c = 24+30+36 = 90$ und somit $16 = a_{12} = \frac{2}{3}c - \lambda = 60 - \lambda, 24 = -60 + \lambda + 2\mu$. Es folgt $\lambda = 44, \mu = 20$, was schliesslich

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 16 & 34 \\ 24 & 30 & 36 \\ 26 & 44 & 20 \end{pmatrix}$$

bedeutet.